

## İdeal Teori Dersi Final Soruları

1-)  $\mathbb{Z}$  tam sayılar halkasında  
 $P = 7\mathbb{Z} = \{7t \mid t \in \mathbb{Z}\}$  ideali veriliyor.

- $P$  maksimal ideal midir?
- $P$  asal ideal midir?

2-)  $R$  birimli ve değişmeli bir halka ve  $I, R$ 'nin bir ideali olsun.  $R/I$  Tamlik bölgesi ise  $I$  asal idealdir, gösteriniz.

3-)  $R$  birimli bir halka,  $I, R$ 'nin bir ideali olsun.  $1_R \in I$  ise  $I = R$  dir, gösteriniz.

4-) Bir halkanın karakteristikini tarif ediniz ve Boole halkasının karakteristikinin 2 olduğunu gösteriniz.

5-) İki idealin toplamını tanımlayınız. Ayrıca toplamları ideal midir? Araştırınız.

# İdeal Teori Final Cevap Anahitleri

- 1- a)  $\forall \pi \in \mathbb{Z} \setminus P$  için  $P + (\pi) = \mathbb{Z}$  dir. Gerçekten  $(7, \pi) = 1$  olup  $\exists a + \pi b = 1, a, b \in \mathbb{Z}$  ve  $(7) + (\pi) = (1) = \mathbb{Z}$  olup  $P = 7\mathbb{Z}$  maksimal idealdir.
- b)  $a, b \in \mathbb{Z}$  için  $a \cdot b \in P \Rightarrow 7 | ab \Rightarrow 7 | a \vee 7 | b \Rightarrow a = 7x \vee b = 7y, x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in P \vee b \in P$  bulunur.

2-  $R/I$  T.B ise birimli değişmeli ve sıfır bölensiz bir halkadır.  $a, b \in R$  için  $a \cdot b \in I$  olsun.

$$I = a \cdot b + I = (a+I)(b+I) \Rightarrow a+I = I \vee b+I = I \Rightarrow a \in I \vee b \in I \text{ bulunur.}$$

3-  $1_R \in I$  olsun.  $I \subseteq R$  dir. Ayrıca  $\forall a \in R$  için  $a = a \cdot 1_R \in I$  olup  $R \subseteq I$  den  $I = R$  bulunur.

4-  $R$  bir halka olsun.  $\forall r \in R$  için  $n \cdot r = 0_R$  olacak şekilde bir  $n > 0$  tam sayısı varsa bunların en küçüğüne  $R$  halkasının karakteristiği denir. Böyle bir  $n$  sayısı yoksa "0" kabul edilir.

$\forall x \in R$  Boole halkası için

$$(x+x)^2 = (x+x)(x+x) = x+x$$

$$= x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x+x$$

$$\Leftrightarrow x + x + x + x = x+x$$

$$2x = 0_R \text{ bulunur.}$$

5 -  $I$  ve  $J$   $R$ 'nin iki ideali olsun.

$I+J = \{a+b \mid a \in I, b \in J\}$  şeklinde tanımlanır.

-  $\forall a_1+b_1, a_2+b_2 \in I+J \Rightarrow$

$$(a_1+b_1) - (a_2+b_2) = (a_1-a_2) + (b_1-b_2) \in I+J$$

-  $\forall r \in R, \forall a+b \in I+J \Rightarrow r(a+b) = ra+rb \in I+J$   
 $(a+b)r = ar+br \in I+J$  olup  $I+J, R$ 'nin idealidir.